

## Differenzierungsstunde Mathematik Klasse 10

## Typ: Planarbeit auf verschiedenen Niveaustufen - Didaktischer Kommentar

**1. Planarbeit: Begründung und Zielsetzung**

- Das eigenständige Erarbeiten eines neuen Sachverhalts (Formel von Bernoulli) mithilfe einer Planarbeit stärkt die Selbstständigkeit, Selbstverantwortung und Teamfähigkeit der Schülerinnen und Schüler.
- Die Methode Planarbeit ermöglicht eine intensivere Betreuung einzelner Schülerinnen und Schüler.
- Es können im Vorfeld mehr oder weniger eng geführte Arbeitsaufträge und Denkanstöße formuliert werden, hieraus ergibt sich die Möglichkeit der Differenzierung, das Arbeiten auf verschiedenen Niveaustufen wird transparent.
- Das Erfassen der Arbeitsaufträge stärkt die Lesekompetenz und die sorgfältige (je nach Anforderungsniveau angeleitete) Dokumentation trainiert das korrekte Anwenden der Fachsprache.

**2. Gestaltung der differenzierten Arbeitsaufträge**

- Dasselbe Thema (Formel von Bernoulli) wird auf drei unterschiedlichen Niveaustufen erarbeitet und anschließend auf zwei verschiedenen Niveaustufen geübt.
- Die jeweiligen Arbeitsaufträge zur Erarbeitung unterscheiden sich im Grad der Führung und durch Tipps auf den Arbeitsblättern.  
Die Übungsaufgaben bewegen sich auf grundlegendem oder erhöhtem Niveau.

**Niveau A: Planarbeit geführt**

Eng geführt berechnen die Schülerinnen und Schüler die singulären Wahrscheinlichkeiten bei einer Bernoulli-Kette der Länge  $n = 4$ . Die Formel von Bernoulli wird anschließend in einem Merksatz vorgegeben, sie soll durch ein weiteres Beispiel aus dem Schulbuch vertieft und durch das Formulieren in Worten gefestigt werden. Hierfür stehen Satzbausteine als Hilfe zur Verfügung. Den Abschluss der Planarbeit bilden Übungsaufgaben aus dem Schulbuch auf grundlegendem Niveau.

**Niveau B: Planarbeit angeleitet**

Schritt für Schritt berechnen die Schülerinnen und Schüler die singulären Wahrscheinlichkeiten bei Bernoulli-Ketten der Länge  $n = 1 - 4$  und beschreiben ihr Vorgehen für eine Kette beliebiger Länge. Die Formel von Bernoulli wird anschließend in einem Merksatz vorgegeben, sie soll durch das Formulieren in Worten gefestigt werden. Hierfür stehen Satzbausteine als Hilfe zur Verfügung. Ein weiteres Beispiel aus dem Schulbuch dient zur Vertiefung der Formel.

Zum Abschluss der Planarbeit können die Schülerinnen und Schüler wählen zwischen

Übungsaufgaben auf grundlegendem Niveau oder auf erhöhtem Niveau, je nachdem wie sicher sie sich im neuen Thema fühlen.

**Niveau C: Planarbeit mit wenig Hilfe**

Schritt für Schritt berechnen die Schülerinnen und Schüler die singulären Wahrscheinlichkeiten bei Bernoulli-Ketten der Länge  $n = 1$  bis 4 und beschreiben ihr Vorgehen für eine Kette beliebiger Länge.

Die Formel von Bernoulli wird anschließend in einem Merksatz vorgegeben und soll von den Schülerinnen und Schülern ohne weitere Hilfestellung erläutert werden. Ein weiteres Beispiel aus dem Schulbuch dient zur Vertiefung und Festigung der Formel. Den Abschluss der Planarbeit bilden Übungsaufgaben aus dem Schulbuch auf erhöhtem Niveau.

### 3. Leitlinien für den Aufbau der Differenzierungsstunde - basierend auf 90 Minuten

- Die Stunde beginnt und endet mit einer gemeinsamen Phase im Plenum. Die Fragestellungen und Arbeitsaufträge in diesen Phasen werden jeweils so offen gestellt, dass alle Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit haben, sich zu beteiligen.
- Der Impuls zu Stundenbeginn (Zeigen eines Überraschungsei's) bezieht die Alltagserfahrungen der Schülerinnen und Schüler ein. Hier kann durchaus auch ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit genannt werden, eine Sammelfigur beim Kauf eines Ü-Ei's zu erhalten.
- Es folgen Zielsetzung und Hinweise zur Durchführung der Planarbeit, die Offenlegung der verschiedenen Niveaustufen, sowie Empfehlungen zum zeitlichen Ablauf (30 min für Vorüberlegungen, 10 min für Hefteintrag, 30 min für Übungen)
- Vor Eintritt in die Übungsphase können im Plenum offene Fragen gestellt werden und idealerweise durch Mitschüler geklärt werden.
- Die Lösungen zu den Übungsaufgaben liegen aus und die Schülerinnen und Schüler kontrollieren selbst ihre Ergebnisse. Bei Unklarheiten wenden sie sich an die Lehrkraft, die über den gesamten Verlauf der Planarbeit durch gezielte Beobachtung das Erreichen des Ziels „Sicheres Anwenden und Verständnis der Formel von Bernoulli“ kontrolliert.
- Den Schluss der Stunde kann man darauf verwenden, das „Alltags-“ wie auch das mathematische Verständnis des Begriffs „Erwartungswert“ abzufragen und abschließend z.B. für  $n = 7$  die Wahrscheinlichkeiten für genau eine Sammelfigur bzw. mindestens eine Sammelfigur zu berechnen.
- Als Hausaufgabe lösen die Schüler ggf. die restlichen Übungen aus ihrer Planarbeit.

## Planarbeit: Die Formel von Bernoulli

Niveau A: geführt

Arbeitszeit: 1 Doppelstunde + häusliche Arbeitszeit

### Vorüberlegung

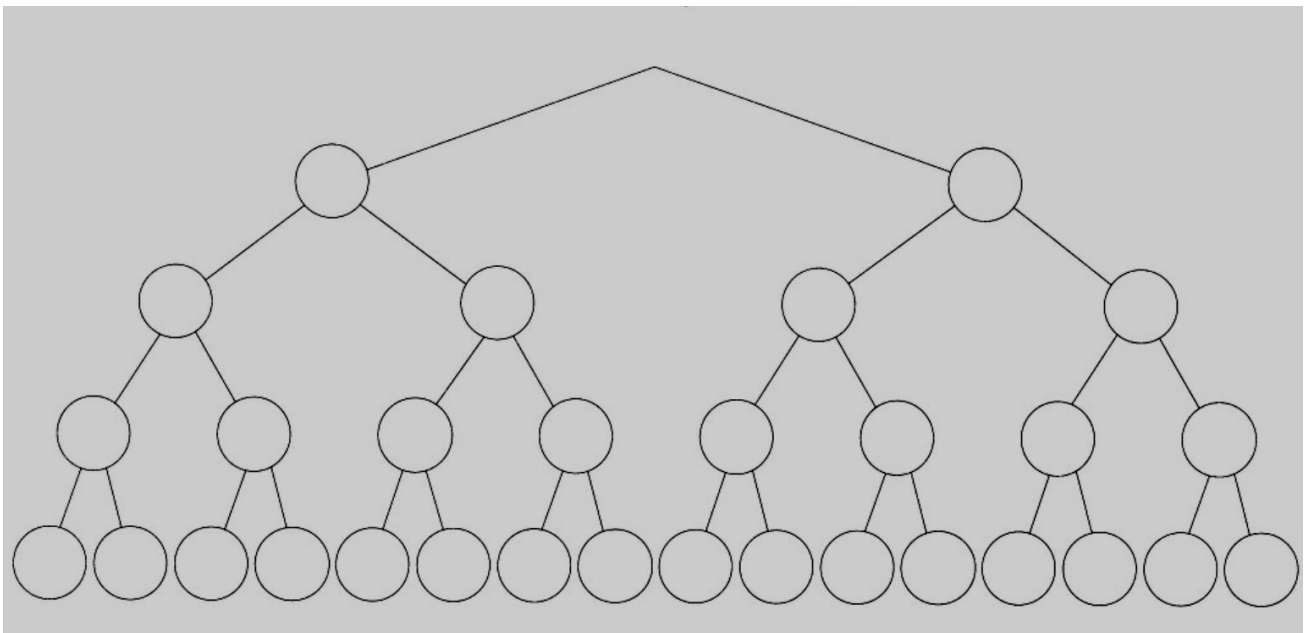
Erinnere dich:

Bei einem Bernoulli-Versuch gibt es immer genau zwei Ausgänge („Erfolg“ und „Misserfolg“). Als Bernoulli-Kette bezeichnet man ein Zufallsexperiment, bei dem ein Bernoulli-Versuch mehrmals durchgeführt wird und sich die Wahrscheinlichkeiten für „Erfolg“ und „Misserfolg“ von Versuch zu Versuch nicht ändern.

Sogenannte Überraschungseier bestehen aus Schokolade in Form eines Eies, in dessen Innerem sich Gimmick-Figuren oder Spielzeug zum Zusammenbauen befinden. Besonders die Figuren sind bei Sammlern sehr begehrt. Angeblich ist in jedem siebten Ei eine solche Figur enthalten.

- 1) Der Kauf eines Überraschungseis kann als Bernoulli-Versuch betrachtet werden. Beschreibe die beiden möglichen Ausgänge mit Worten und gib die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten an.
- 2) Der Kauf von vier Überraschungseiern kann als Bernoulli-Kette der Länge  $n = 4$  betrachtet werden und durch ein Baumdiagramm veranschaulicht werden.

Ergänze das Baumdiagramm:



- 3) Ergänze nun folgende Tabelle und berechne damit die Wahrscheinlichkeit beim Kauf von vier Überraschungseiern keine (eine, zwei, drei, vier) Figur(en) zu erhalten:  
(Die Zufallsvariable  $X$  beschreibt die Anzahl der „Erfolge“)

Anzahl der erhaltenen Figuren ( $r$ )	0	1	2	3	4
Zahl der möglichen Pfade					
Wahrscheinlichkeit eines dieser Pfade					
$P(X = r)$					

Dokumentation: Heftaufschrieb „Die Formel von Bernoulli“

4) Übertrage den folgenden Merksatz in dein Heft:

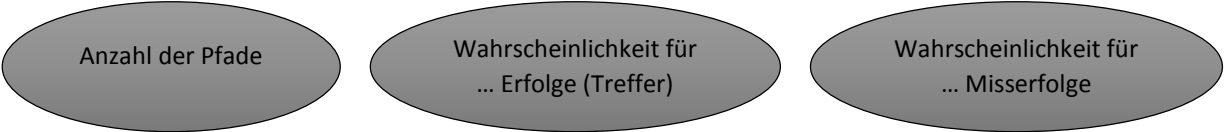
Bei einer Bernoulli-Kette der Länge  $n$  erhält man die Wahrscheinlichkeit für  $r$  Erfolge (Treffer) mithilfe der Formel von Bernoulli:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r}.$$

Dabei ist  $p$  die Wahrscheinlichkeit für „Erfolg“.

5) Übertrage das Beispiel von S. 139<sup>1</sup> in dein Heft.

6) Formuliere die Formel von Bernoulli mit Worten, du kannst dabei folgende Satzbausteine verwenden:



Anzahl der Pfade

Wahrscheinlichkeit für  
... Erfolge (Treffer)

Wahrscheinlichkeit für  
... Misserfolge

Der Ausdruck  $\binom{n}{r}$  (gesprochen „n über r“) heißt **Binomialkoeffizient**.

WTR-Hinweis: Mithilfe des Befehls `nCr` kann der Binomialkoeffizient berechnet werden.

Beispiel  $\binom{5}{3} = 10$ ; die Eingabe `5 nCr 3` liefert das Ergebnis `10`.

Übungen:

S. 139/2

S. 140/7a)b)c)

S. 139/3

S. 140/5

<sup>1</sup> Verwendetes Lehrbuch: Lambacher Schweizer 6, Mathematik für Gymnasien, Klett, 2008

## Planarbeit: Die Formel von Bernoulli

Niveau B: angeleitet

Arbeitszeit: 1 Doppelstunde + häusliche Arbeitszeit

### Vorüberlegung

Sogenannte Überraschungseier bestehen aus Schokolade in Form eines Eies, in dessen Innerem sich Gimmick-Figuren oder Spielzeug zum Zusammenbauen befinden. Besonders die Figuren der Überraschungseier sind bei Sammlern begehrt. Angeblich ist in jedem siebten Ei eine solche Figur enthalten.

- 1) Erläutere, warum der Kauf mehrerer Überraschungseier als Bernoulli-Kette bezeichnet werden kann.
- 2) Berechne die Wahrscheinlichkeit beim Kauf von zwei Überraschungseiern keine (eine, zwei) Figur(en) zu erhalten.
- 3) Berechne die Wahrscheinlichkeit beim Kauf von drei Überraschungseiern keine (eine, zwei, drei) Figur(en) zu erhalten.
- 4) Berechne die Wahrscheinlichkeit beim Kauf von vier Überraschungseiern keine (eine, zwei, drei, vier) Figur(en) zu erhalten.
- 5) Beschreibe, wie du vorgehen musst, um die Wahrscheinlichkeit für  $r$  Figuren beim Kauf von  $n$  Überraschungseiern zu erhalten.

### Dokumentation: Heftaufschrieb „Die Formel von Bernoulli“

- 6) Übertrage den folgenden Merksatz in dein Heft:

Bei einer Bernoulli-Kette der Länge  $n$  erhält man die Wahrscheinlichkeit für  $k$  Treffer mithilfe der Formel von Bernoulli:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r}.$$

Dabei ist  $p$  die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer.

- 7) Formuliere die Formel von Bernoulli mit Worten, du kannst dabei folgende Satzbausteine verwenden:

Anzahl der Pfade

Wahrscheinlichkeit für  
... Erfolge (Treffer)

Wahrscheinlichkeit für  
... Misserfolge

Der Ausdruck  $\binom{n}{r}$  (gesprochen „n über r“) heißt **Binomialkoeffizient**.

*WTR-Hinweis:* Mithilfe des Befehls `nCr` kann der Binomialkoeffizient berechnet werden.

Beispiel  $\binom{5}{3} = 10$ ; die Eingabe `5 nCr 3` liefert das Ergebnis `10`.

- 8) Übertrage das Beispiel von S. 139<sup>2</sup> in dein Heft

<sup>2</sup> Verwendetes Lehrbuch: Lambacher Schweizer 6, Mathematik für Gymnasien, Klett, 2008  
Materialien für die Fortbildung am 11.7.2016 am SSDL Stuttgart

Übungen:

Ich habe alles gut verstanden und fühle mich fit	Ich brauche noch ein bisschen Zeit
<p>S. 140/7a)b)c)</p> <p>S. 139/4</p> <p>S. 140/5</p> <p>S. 141/9a)b)e)</p> <p>S. 141/10</p>	<p>S. 139/2</p> <p>S. 140/7a)b)c)</p> <p>S. 139/3</p> <p>S. 140/5</p>

Anmerkung zu Aufgabe S.141/10:

Die Formel  $(p + q)^n = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot q^n + \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot q^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot q^0$  heißt „binomischer Lehrsatz“.

## Planarbeit: Die Formel von Bernoulli

Niveau C: mit wenig Hilfe

Arbeitszeit: 1 Doppelstunde + häusliche Arbeitszeit

Vorüberlegung

Sogenannte Überraschungseier bestehen aus Schokolade in Form eines Eies, in dessen Innerem sich Gimmick-Figuren oder Spielzeug zum Zusammenbauen befinden. Besonders die Figuren der Überraschungseier sind bei Sammlern begehrt. Angeblich ist in jedem siebten Ei eine solche Figur enthalten.

- 1) Erläutere, warum der Kauf mehrerer Überraschungseier als Bernoulli-Kette bezeichnet werden kann.
- 2) Berechne die Wahrscheinlichkeit beim Kauf von zwei Überraschungseiern keine (eine, zwei) Figur(en) zu erhalten.
- 3) Berechne die Wahrscheinlichkeit beim Kauf von drei Überraschungseiern keine (eine, zwei, drei) Figur(en) zu erhalten.
- 4) Berechne die Wahrscheinlichkeit beim Kauf von vier Überraschungseiern keine (eine, zwei, drei, vier) Figur(en) zu erhalten.
- 5) Beschreibe, wie du vorgehen musst, um die Wahrscheinlichkeit für  $r$  Figuren beim Kauf von  $n$  Überraschungseiern zu erhalten.

Dokumentation: Heftaufschrieb „Die Formel von Bernoulli“

- 6) Übertrage den folgenden Merksatz in dein Heft:

Bei einer Bernoulli-Kette der Länge  $n$  erhält man die Wahrscheinlichkeit für  $k$  Treffer mithilfe der Formel von Bernoulli:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1 - p)^{n-r}.$$

Dabei ist  $p$  die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer.

- 7) Der Ausdruck  $\binom{n}{r}$  (gesprochen „n über r“) heißt **Binomialkoeffizient**.  
Erläutere die Bedeutung dieses Faktors in der Formel.

*WTR-Hinweis: Mithilfe des Befehls `nCr` kann der Binomialkoeffizient berechnet werden.*

*Beispiel  $\binom{5}{3} = 10$ ; die Eingabe `5 nCr 3` liefert das Ergebnis `10`.*

Erläutere auch die Bedeutung der anderen beiden Faktoren  $p^r$  und  $(1 - p)^{n-r}$ .

- 8) Übertrage das Beispiel von S. 139<sup>3</sup> in dein Heft.

Übungen:

S. 140/7a)b)c)

S. 139/4

S. 140/5

S. 141/9a)b)e)

S. 141/10

Anmerkung zu Aufgabe S. 141/10:

Die Formel  $(p + q)^n = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot q^n + \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot q^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot q^0$  heißt „binomischer Lehrsatz“.

<sup>3</sup> Verwendetes Lehrbuch: Lambacher Schweizer 6, Mathematik für Gymnasien, Klett, 2008